

Oplossing bij opdracht 1: de pittige pistes

Opdracht

Wiske is op skivakantie. Samen met haar vrienden hebben ze afgesproken in de Après Skihut beneden de piste. Er zijn echter vier verschillende pistes en Wiske weet niet welke te nemen:

- De eerste piste kan ze afdalen in 7 minuten; deze komt uit in de Après Skihut.
- De tweede piste loopt ten einde na 2 minuten; als zij deze kiest en via de skilift terug naar boven gaat, is zij in totaal na 4 minuten terug waar ze vertrok.
- De derde piste komt ook uit aan de Après Skihut en is te skiën in 3 minuten.
- De laatste piste komt niet uit bij de hut; bij deze piste kan Wiske terug boven zijn in 6 minuten, inclusief de afdaling.

Door de kou is Wiske helaas erg vergeetachtig. Wanneer ze terug boven komt, is ze telkens vergeten welke piste ze al geprobeerd heeft. Ze kiest dan steeds willekeurig uit één van de skipistes. Wat is de verwachte tijd die Wiske erover doet om in de Après Skihut te geraken?

Een oplossingsmethode

De eerste keer dat Wiske een piste kiest, is de verwachte tijd om ofwel in de hut, ofwel terug op haar startpunt te geraken gelijk aan:

$$\frac{1}{4} \cdot 7 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 6 = 5.$$

De kans dat ze terug bovenaan de pistes is, is $\frac{1}{2}$. In dat geval maakt ze weer een keuze en is ze opnieuw na een verwachte 5 minuten in de hut of aan het startpunt. Opnieuw heeft ze een kans van $\frac{1}{2}$ om bovenaan uit te komen. Dit proces herhaalt zich. We krijgen aldus volgende verwachte tijd om in de hut te geraken:

$$5 + \frac{1}{2} \cdot 5 + \frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{1}{8} \cdot 5 + \dots = 5 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right) = 5 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 5 \cdot 2 = 10.$$

De laatste afleiding is gemaakt door te zien dat het een meetkundige reeks betreft met factor $\frac{1}{2}$. De verwachte tijd die Wiske erover doet om in de hut te geraken is dus 10 minuten.